# Teorema di Lagrange

Se una funzione F(x) è continua in un intervallo chiuso e limitato [a.b] e derivabile in (a.b) allora esiste un punto c interno ad (a.b) per cui vale la relazione:

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)}$$

## Dimostrazione

$$\varphi = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)\right]$$

Sostituisco a:

$$\varphi(a) = f(a) - \left[f(a) + \cancel{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}\,\underbrace{\cancel{(a-a)}}_{0}\right] = f(a)-f(a)=0$$

Sostituisco b:

$$\varphi(b) = f(b) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\,\cancel{(b-a)}\right] = \cancel{f(b)} - \cancel{f(a)} - \cancel{f(b)} + \cancel{f(a)} = 0$$

Poiché F(x) soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle esiste almeno un punto c appartenente ad (a.b) tale che: F(c)=0. Allora calcoliamo la derivata di F(x):

$$\varphi' = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \longrightarrow \exists\, c \in (a,b) \text{ t.c. } \varphi'(c)=0 \quad \text{Allora:}$$

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \longrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

### Corollario del Teorema di Lagrange

Se $f(x)$ è continua in $[a,b]$, derivabile in $(a,b)$ e t.c. $f'(x)=0$ in ogni punto dell'intervallo $\longrightarrow$ allora $f(x)$ è costante in tutto $[a,b]$

**Dimostrazione:**
Applichiamo il Teorema di Lagrange all'intervallo $[a,x]$, dove $x$ è un punto qualsiasi di $[a,b]$ diverso da $a$; ed esiste un punto $c \in (a,b)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ essendo $f'(x)=0$ $\forall$ punto di $(a,b)$ allora $f'(c)=0$

deve essere allora che: $f(x)-f(a)=0 \longrightarrow f(x)=f(a) \quad \forall x \in [a,b]$

Quindi $f$ è costante in tutto $[a,b]$

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni continue nell'intervallo $[a,b]$, derivabili in $(a,b)$ e t.c. $f'(x)=g'(x)$ $\forall x \in (a,b)$, allora esse differiscono per una costante

DIMOSTRAZIONE:

Chiamiamo $z(x)$ la loro differenza ossia $z(x)=f(x)-g(x)$ e si ha:

$$z'(x)=f'(x)-g'(x)$$

Per ipotesi $f'(x)=g'(x)$ quindi $z'(x)=0$ $\forall x \in (a,b)$

Per il teorema precedente, $z(x)=k$ in tutto $[a,b]$ e quindi $f(x)-g(x)=k$